



ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Μάθημα: Μαθηματικά Ο.Π.

- Στο σύνολο των φροντιστηρίων μας πραγματοποιούνται στη διάρκεια του ακαδημαϊκού έτους έως και 23 σταθμισμένα διαγωνίσματα προσομοίωσης σε κάθε τάξη. Με τον τρόπο αυτό, εξοικειώνεσαι με την εξεταστική φιλοσοφία των Πανελλαδικών Εξετάσεων, καθώς εσύ και οι συμμαθητές σου διαγωνίζεστε, την ίδια ώρα, σε κοινά θέματα, τα οποία επιμελείται το Ακαδημαϊκό μας Τμήμα.
- Λίγες ημέρες μετά την επίδοση της βαθμολογίας σου, παραλαμβάνεις τη στατιστική ανάλυση των αποτελεσμάτων και πληροφορείσαι για τον μέσο όρο βαθμολογίας του Ομίλου και τη βαθμολογική κλιμάκωση, στο συγκεκριμένο διαγώνισμα, συγκρίνοντας έτσι την επίδοσή σου με αυτή του συνόλου των μαθητών μας, σε όλη την Ελλάδα.



ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

Γ' ΤΑΞΗ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΥΡΙΑΚΗ 30/04/2017 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ο.Π

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

Θέμα Α

A1. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 τότε να αποδείξετε ότι είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 7

A2. Πότε η ευθεία $y = \ell \in \mathbb{R}$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

Μονάδες 4

A3. Πότε μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση «1 – 1».

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Μια συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα απ' τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το Πεδίο Ορισμού της.

β) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 τότε το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

γ) Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 0$.

δ) Πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων συνάρτησης f σε διάστημα Δ είναι μόνο τα εσωτερικά σημεία στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.

ε) Αν f, g' είναι συνεχείς συναρτήσεις, $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$, και $u_1 = g(\alpha)$, $u_2 = g(\beta)$ τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)du$$

Μονάδες 10

Θέμα Β

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $A_f = [0,5]$ και τιμές: $f(4) = -8$,

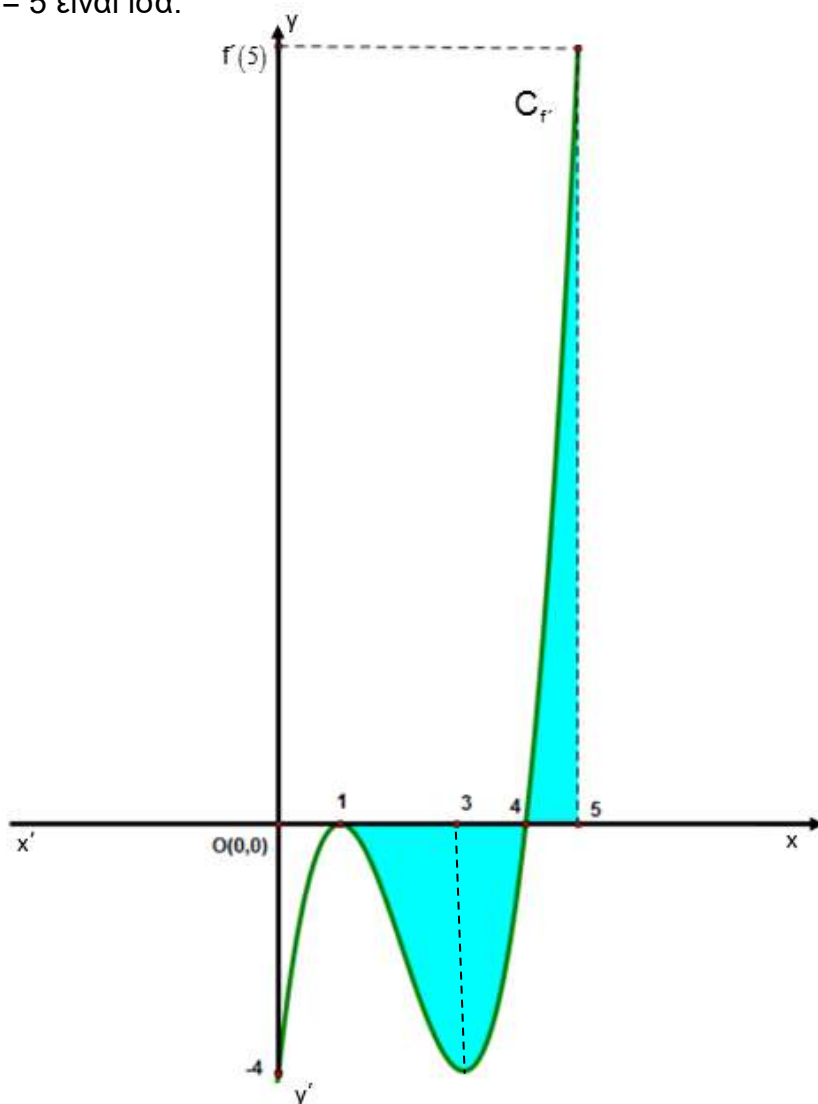
$f(0) = 0$ και $f(1) = -\frac{5}{4}$. Η γραφική παράσταση C_f της παραγώγου συνάρτησης της f δίνεται

στο παρακάτω σχήμα όπου τα εμβαδά E_1 του χωρίου που περικλείεται από το C_f τον άξονα

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

xx' , τις ευθείες $x = 1$ και $x = 4$, E_2 του αντίστοιχου που περικλείεται από το C_f τον άξονα xx' , τις ευθείες $x = 4$ και $x = 5$ είναι ίσα.



B1. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τις θέσεις τοπικών ακρότατων της f .

Μονάδες 6

B2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη καθώς και τις θέσεις των σημείων καμπής της γραφικής παράστασης της f .

Μονάδες 6

B3. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f στα σημεία με τετμημένες $x_0 = 0$ και $x_0 = 1$.

Μονάδες 5

B4. i. Να αποδείξετε ότι $f(5) = -\frac{5}{4}$.

Μονάδες 4

ii. Να βρείτε το Σύνολο Τιμών της συνάρτησης f .

Μονάδες 4

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

Θέμα Γ

Έστω η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln x^x + \alpha x - \alpha$ για την οποία ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x > 0$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$ και ότι $f(x) = x \ln x - x + 1$, $x > 0$.

Μονάδες 5

Γ2. i) Να αποδείξετε ότι $\ln x < f(x+1) - f(x) < \ln(x+1)$ για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 4

ii) Αν σημείο M κινείται στο γράφημα της f' με την τετμημένη της προβολής M' του M στον xx' να αυξάνεται με ρυθμό 2 μ/s· τη στιγμή που M διέρχεται από το σημείο $A(e, 1)$ να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου (OMM') .

Μονάδες 4

Αν ακόμα $g(x) = e^x + \frac{f(x)-1}{x}$, $x > 0$

Γ3. i) Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη g^{-1} και να βρείτε το Πεδίο Ορισμού της.

Μονάδες 3

ii) Να υπολογίσετε το: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(g(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{g(x)} + \frac{\eta\mu g(x)}{g(x)} \right)$.

Μονάδες 4

Γ4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \int_{e^{-1}}^{e^e} g^{-1}(x) dx$.

Μονάδες 5

Θέμα Δ

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$. Οι συναρτήσεις F και G είναι παράγουσες των f και g αντίστοιχα με $F(1) = G(1)$. Αν ισχύουν τα εξής:

$$\bullet \int_1^e ((x-1) \ln x (2f(x) - (x-1) \ln x)) dx = \int_1^e f^2(x) dx \quad \text{και}$$

$$\bullet (x-1)g'(x) - g(x) = (x-1)^2 e^{-\frac{g(x)}{x-1}}, \quad \text{για κάθε } x \in (1, e] \text{ και } g(2) = \ln 2, \text{ τότε:}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = g(x) = (x-1) \ln x$, $x \in [1, e]$.

Μονάδες 8

Δ2. α) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $[1, e]$ και ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μοναδική λύση την $x = 1$.

Μονάδες 2

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left[2017 \frac{\eta\mu(x-1)}{(x-1)^2} (G(x) - G(1)) \right]$.

Μονάδες 3

Δ3. Έστω $M(\xi, f(\xi))$, με $\xi \in [1, e]$, ένα τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της f . Φέρνουμε την εφαπτομένη (ε) της C_f στο M . Να βρείτε για ποια τιμή ξ_0 του ξ το εμβαδόν $E(\xi)$ του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την εφαπτομένη (ε) της C_f στο M και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$ γίνεται ελάχιστο.

Μονάδες 5

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

Δ4. α) Να μελετηθεί η μονοτονία της f και της F στο διάστημα $[1, e]$.

Μονάδες 2

β) Να λυθεί η ανίσωση: $\frac{G(2x) - F(2x-1)}{G(x+1) - F(x)} \leq \frac{e^x}{e^{2x-1}}$ στο διάστημα $[1, e]$.

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μην γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **ΜΟΝΟ** για πίνακες, διαγράμματα κλπ..
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μιάμιση (1,5) ώρα μετά την έναρξη του διαγωνίσματος.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ