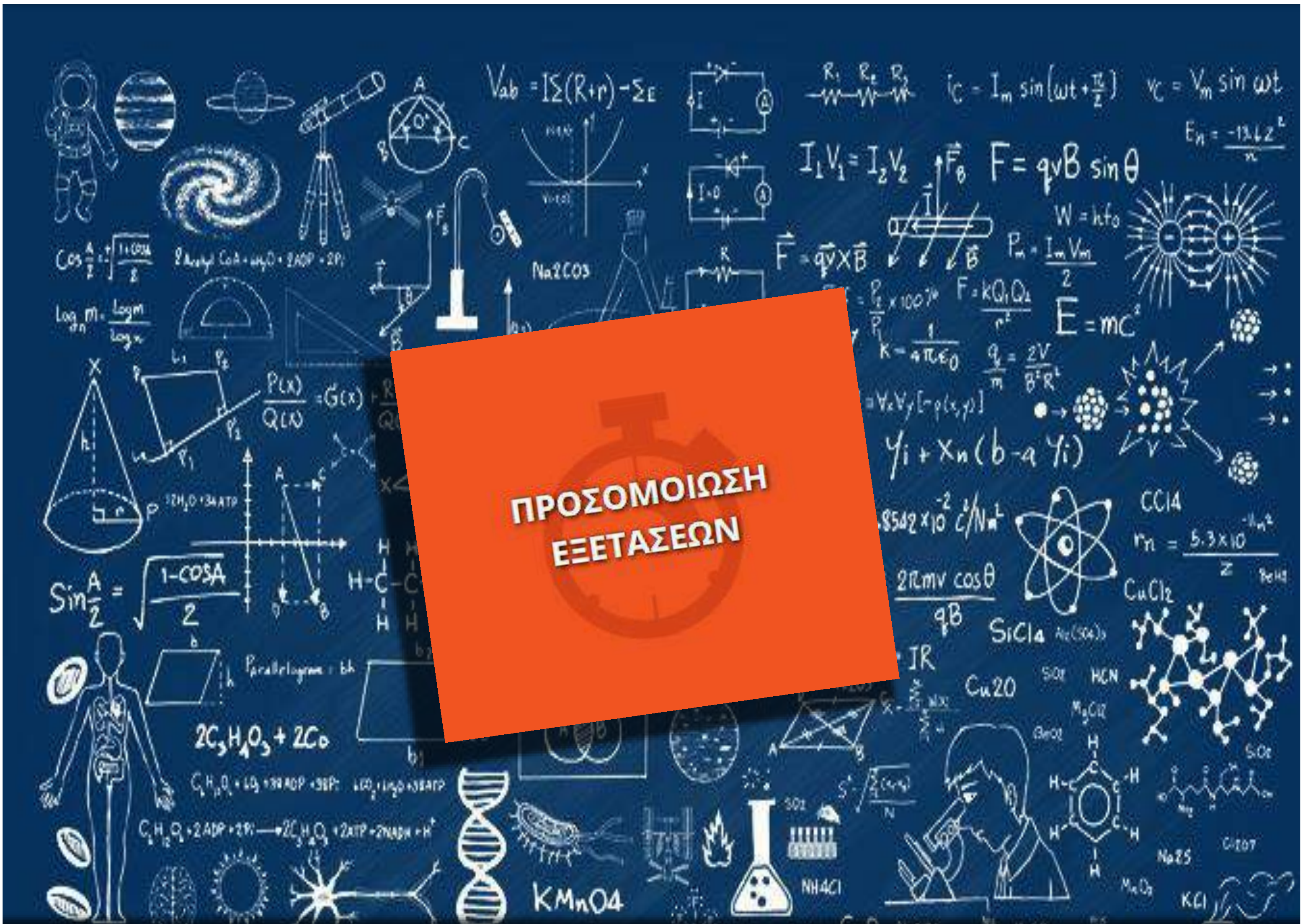
φροντιστήρια
πουκαμισάς

Πύργος Ηλείας – Πατρών 22 , τηλ. 26210 20407



Μάθημα: Μαθηματικά Ο.Π.

- Στο σύνολο των φροντιστηρίων μας πραγματοποιούνται στη διάρκεια του ακαδημαϊκού έτους έως και 23 σταθμισμένα διαγωνίσματα προσομοίωσης σε κάθε τάξη.
  Με τον τρόπο αυτό, εξοικειώνεσαι με την εξεταστική φιλοσοφία των Πανελλαδικών Εξετάσεων, καθώς εσύ και οι συμμαθητές σου διαγωνίζεστε, την ίδια ώρα, σε κοινά θέματα, τα οποία επιμελείται το Ακαδημαϊκό μας Τμήμα.

- Λίγες ημέρες μετά την επίδοση της βαθμολογίας σου, παραλαμβάνεις τη στατιστική ανάλυση των αποτελεσμάτων και πληροφορείσαι για τον μέσο όρο βαθμολογίας του Ομίλου και τη βαθμολογική κλιμάκωση, στο συγκεκριμένο διαγώνισμα, συγκρίνοντας έτσι την επίδοσή σου με αυτή του συνόλου των μαθητών μας, σε όλη την Ελλάδα.

ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ :	Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ΄ Λυκείου
ΣΕΙΡΑ:	
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:	
ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ:	

Θέμα Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^{\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$, είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$.

Μονάδες 6

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Fermat.

Μονάδες 4

Α3. Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το θεώρημα Bolzano.

Μονάδες 5

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν η f είναι συνεχής στο [α, β] και έχει ρίζα στο (α,β) τότε $f(\alpha)f(\beta)<0$.

β) Αν $f'(x)>0$ για κάθε x στο εσωτερικό του Δ τότε η f γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

γ) Αν ισχύει $f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_0 τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

δ) Αν η f συνεχής στο $A_1\cup A_2$ και $f'(x)=0$ για κάθε x στο εσωτερικό του $A_1\cup A_2$ τότε η f σταθερή στο $A_1\cup A_2$.

ε) Μια συνεχής συνάρτηση διατηρεί πρόσημο μεταξύ δυο διαδοχικών ριζών της.

Μονάδες 10

Θέμα Β

Θεωρούμε συναρτήσεις $f(x)=2x+\ln x-2,\ x>0$ $g(x)=\dfrac{2x-\ln x}{2\sqrt{x}},\ x>0$.

Β1. Να βρείτε το πρόσημο της f.

Μονάδες 6

Β2. Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 9

Β3. Να αποδείξετε ότι η $g(x)=1$ έχει μοναδική θετική ρίζα.

Μονάδες 10

Θέμα Γ

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύουν:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}+f'(x)+e^{-x}=0 \ (1) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

$f(x)\le\frac{1}{e}=f(1)$ (2) για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

ι) $f''(x)+f'(x)+e^{-x}=0,\ x\in\mathbb{R}$ **Μονάδες 6**

ιι) $f(x)=\frac{x}{e^x},\ x\in\mathbb{R}$ **Μονάδες 6**

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε το σημείο καμπής.

Μονάδες 3

Γ3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ ισχύει $e^2f(\alpha+1)\ge -1+e^2f(\alpha)$.

Μονάδες 7

Γ4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της g όταν $g(x)=xf(x)$.

Μονάδες 3

Θέμα Δ

Έστω συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη με $g''(x_0)=-3$ και συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(x_0+2h)-2g(x_0+h)+g(x_0)}{h^2}, & x=0\\ -e^x+x-2, & 0<x<1\\ \frac{\ln^2 x}{2}+x-\ln x-e-2, & x\ge 1\end{cases}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$.

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

Μονάδες 4

Δ3. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 4

Δ4. Να λύσετε την ανίσωση:

$$\ln^2(x^2+2)-\ln^2(x^4+2)+2x^2<2\ln\left(\frac{x^2+2}{x^4+2}\right)+2x^4.$$

Μονάδες 6

Δ5. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^e f(x)dx$.

Μονάδες 5

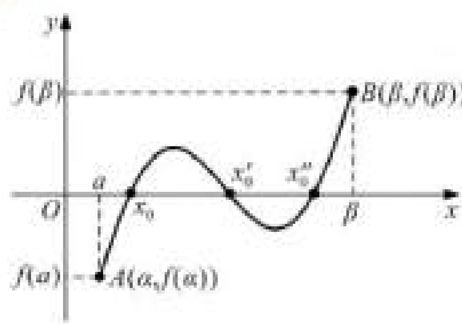
Απαντήσεις

Θέμα Α

Α1. Πράγματι, αν $y=x^{\alpha}=e^{\alpha\ln x}$ και θέσουμε $u=\alpha\ln x$, τότε έχουμε $y=e^{u}$. Επομένως, $y'=\left(e^{u}\right)'=e^{u}u'=e^{\alpha\ln x}\alpha\frac{1}{x}=x^{\alpha}\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}$

Α2. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε : $f'(x_0)=0$

Α3. Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο [α, β]. Επειδή τα σημεία Α(α, f(α)) και Β(β, f(β)) βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα x'x, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο.



Α4. **α)** Λ, **β)** Λ, **γ)** Λ, **δ)** Λ, **ε)** Σ

Θέμα Β

Β1. Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως άθροισμα, διαφορά και γινόμενο συνεχών συναρτήσεων. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως άθροισμα, διαφορά και γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$f'(x)=2+\frac{1}{x}>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Ισχύει : $f(1)=2+\ln1-2=0$

Άρα για κάθε $x>1$ έχουμε:

$x>1\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x)>f(1)\Leftrightarrow f(x)>0$

ενώ για κάθε $0<x<1$ έχουμε:

$x<1\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x)<f(1)\Leftrightarrow f(x)<0$

x	0	1	$+\infty$
f		$-$	$+$

Β2. Η g είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως διαφορά, πηλίκο και γινόμενο συνεχών συναρτήσεων. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως διαφορά πηλίκο και γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$g'(x)=\frac{\left(2-\frac{1}{x}\right)2\sqrt{x}-(2x-\ln x)\left(2\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{4x}=\frac{4\sqrt{x}-\frac{2\sqrt{x}}{x}-\frac{2x}{\sqrt{x}}+\frac{\ln x}{\sqrt{x}}}{4x}=$$

$$\frac{\frac{4x^2-2x-2x^2+x\ln x}{x\sqrt{x}}}{4x}=\frac{x(2x-2+\ln x)}{x\sqrt{x}4x}=\frac{f(x)}{4x\sqrt{x}}\Leftrightarrow$$

$$g'(x)=\frac{f(x)}{4x\sqrt{x}},\ x>0$$

Για κάθε $x>0$ ισχύει $4x\sqrt{x}>0$ άρα

$$g'(x)>0\Leftrightarrow\frac{f(x)}{4x\sqrt{x}}>0\Leftrightarrow f(x)>0\Leftrightarrow x>1$$

Αφού η g είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και σύμφωνα με το διπλανό πίνακα θα ισχύουν:

η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$,

η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$,

η g παρουσιάζει για $x_0=1$ ολικό ελάχιστο το $g(1)=1$.

x	0	1	$+\infty$
g′		$-$	$+$
g		$\searrow$	$\nearrow$

Β3. Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ άρα για κάθε $x\in(0,1)$ με $x<1$ ισχύει: $x<1\overset{g\searrow}{\Leftrightarrow}g(x)>g(1)\Leftrightarrow g(x)>1$

άρα η $g(x)=1$ δεν έχει ρίζα στο $(0,1)$.

Η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ άρα για κάθε $x\in(1,+\infty)$ με $x>1$ ισχύει: $x>1\overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow}g(x)>g(1)\Leftrightarrow g(x)>1$

άρα η $g(x)=1$ δεν έχει ρίζα στο $(1,+\infty)$
Αλλά $g(1)=1$ άρα η $g(x)=1$ έχει μοναδική θετική ρίζα το $x_0=1$ στο $(0,+\infty)$.

Θέμα Γ

Γ1. i) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}\underset{D.L.H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{h\to 0}\frac{2f'(x+2h)-2f'(x+h)}{2h}=$

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f'(x+2h)-f'(x+h)}{h}\underset{D.L.H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{h\to 0}\frac{2f''(x+2h)-f''(x+h)}{1}=$

$\lim\limits_{h\to 0}\left(2f''(x+2h)-f''(x+h)\right)=f''(x)$ (αφού f'' συνεχής).

Άρα $f''(x)+f'(x)+e^{-x}=0,\ x\in\mathbb{R}$

ii) $f''(x)+f'(x)+e^{-x}=0\Leftrightarrow\left(f'(x)+f(x)-e^{-x}\right)'=0$ επομένως από συνέπειες Θεωρήματος Μέσης Τιμής $f'(x)+f(x)-e^{-x}=c$, (3)

Ισχύει από (2) $f(1)=\frac{1}{e}$ και $f(x)\le f(1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0=1$ το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό, άρα ισχύει το θεώρημα Fermat. Συνεπώς $f'(1)=0$

Για $x=1$ στην (3) έχουμε: $0+\frac{1}{e}-\frac{1}{e}=c\Leftrightarrow c=0$ άρα

$f'(x)+f(x)-e^{-x}=0\Leftrightarrow e^xf'(x)+e^xf(x)-1=0\Leftrightarrow\left(e^xf(x)-x\right)'=0$ επομένως από συνέπειες Θεωρήματος Μέσης Τιμής $e^xf(x)-x=c_1$ (4)

Για $x=1$ στην (4) έχουμε: $e^1f(1)-1=c_1\Leftrightarrow e\frac{1}{e}-1=c_1\Leftrightarrow c_1=0$

Συνεπώς $e^xf(x)-x=0\Leftrightarrow e^xf(x)=x\Leftrightarrow f(x)=\frac{x}{e^x},x\in\mathbb{R}$

Γ2. $f'(x)=\frac{e^x-xe^x}{e^{2x}}=\frac{e^x(1-x)}{e^{2x}}=\frac{1-x}{e^x},x\in\mathbb{R}$

$f''(x)=\frac{-e^x-(1-x)e^x}{e^{2x}}=\frac{e^x(-1-1+x)}{e^{2x}}=\frac{x-2}{e^x}\ x\in\mathbb{R}$

Είναι $f''(x)>0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{e^x}>0 \Leftrightarrow x-2>0 \Leftrightarrow x>2$

Άρα η f κυρτή στο $[2,+\infty)$
και κοίλη στο $(-\infty,2]$
Η f παρουσιάζει σημείο καμπής το
$(2,f(2))$ ή $\left(2,\frac{2}{e^2}\right)$
αφού αλλάζει η κυρτότητα

x	-∞	2	+∞
f''	-	0	+
f	∩		∪

εκατέρωθεν του $x_1=2$ και δέχεται εφαπτομένη στο $\left(2,\frac{2}{e^2}\right)$ αφού είναι παραγωγίσιμη.

Γ3. $e^2f(\alpha+1)\geq -1+e^2f(\alpha) \Leftrightarrow e^2(f(\alpha+1)-f(\alpha))\geq -1 \Leftrightarrow f(\alpha+1)-f(\alpha)\geq -\frac{1}{e^2}$

Η f συνεχής στο [α,α+1]
Η f παραγωγίσιμη στο (α,α+1)
οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\alpha+1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(\alpha+1)-f(\alpha)}{\alpha+1-\alpha}=f(\alpha+1)-f(\alpha)$$

Η f' παρουσιάζει στο $x_1=2$ ολικό ελάχιστο το $f'(2)=-\frac{1}{e^2}$ αφού η f' συνεχής στο $\mathbb{R}$ και αλλάζει η μονοτονία εκατέρωθεν του $x_1=2$ όπως φαίνεται στον διπλανό πίνακα.

x	-∞	2	+∞
f''	-	0	+
f'	↘		↗

Συνεπώς ισχύει $f'(x)\geq -\frac{1}{e^2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Η παραπάνω σχέση για $x=\xi$ δίνει $f'(\xi)\geq -\frac{1}{e^2} \Leftrightarrow f(\alpha+1)-f(\alpha)\geq -\frac{1}{e^2}$

Γ4. $g(x)=xf(x)=x\frac{x}{e^x}=\frac{x^2}{e^x},\ x\in\mathbb{R}$

Η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^x x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to-\infty}\left(x\frac{1}{e^x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(xe^{-x}\right)=-\infty$$

άρα η C_g δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες στο $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{D.L.H}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$ άρα η $y=0$ οριζόντια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$

Θέμα Δ

Δ1. $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{g(x_0+2h)-2g(x_0+h)+g(x_0)}{h^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{D.L.H}{=}}\lim\limits_{h\to0}\dfrac{2g'(x_0+2h)-2g'(x_0+h)}{2h}=$

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{g'(x_0+2h)-g'(x_0+h)}{h}=$

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{g'(x_0+2h)-g'(x_0)-g'(x_0+h)+g'(x_0)}{h}=$

$\lim\limits_{h\to0}\left(\dfrac{g'(x_0+2h)-g'(x_0)}{h}-\dfrac{g'(x_0+h)-g'(x_0)}{h}\right)$ (1) αλλά

- $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{g'(x_0+h)-g'(x_0)}{h}=g''(x_0)$
- $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{g'(x_0+2h)-g'(x_0)}{h}\overset{2h=\omega}{=}\lim\limits_{\omega\to0}\dfrac{g'(x_0+\omega)-g'(x_0)}{\frac{\omega}{2}}=$

$\lim\limits_{\omega\to0}2\dfrac{g'(x_0+\omega)-g'(x_0)}{\omega}=2g''(x_0)$

αφού η g δυο φορές παραγωγίσιμη. Τότε η (1) γίνεται:

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{g(x_0+2h)-2g(x_0+h)+g(x_0)}{h^2}=2g''(x_0)-g''(x_0)=g''(x_0)=-3$

Συνεπώς $f(x)=\begin{cases}-3, & x=0\\ -e^x+x-2, & 0<x<1\\ \dfrac{\ln^2 x}{2}+x-\ln x-e-2, & x\ge1\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(-e^x+x-2)=-3$ και $f(0)=-3$ άρα $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=f(0)$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(-e^x + x - 2) = -e - 1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{\ln^2 x}{2} + x - \ln x - e - 2\right) = -e - 1$

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -e - 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x) = -e - 1$ και $f(1) = -e - 1$ άρα $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$ άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Η f είναι συνεχής στο $(0,1)$ ως διαφορά εκθετικής και πολυωνυμικής.
Η f είναι συνεχής στο $(1,+\infty)$ ως σύνθεση διαφορά και άθροισμα λογαριθμικής και πολυωνυμικής.
Συνεπώς η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$.

Δ2. $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{-e^x + x - 2 + e + 1}{x-1} \underset{D.L.H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{-e^x + 1}{1} = 1 - e$

$\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\dfrac{\ln^2 x}{2} + x - \ln x - e - 2 + e + 1}{x-1} \underset{D.L.H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\dfrac{1}{x}\ln x + 1 - \dfrac{1}{x}}{1} = 0$

άρα $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} \neq \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

Δ3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $f'(x) = 1 - e^x$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - e^x > 0 \Leftrightarrow x < 0$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με $f'(x) = \dfrac{1}{x}\ln x + 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{\ln x + (x-1)}{x} > 0$ για κάθε $x \in (1,+\infty)$ αφού $x - 1 > 0$ και $\ln x > 0$.

Η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$. Τότε σύμφωνα με τον διπλανό πίνακα:
η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$,
η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$,
η f παρουσιάζει για x=0 τοπικό μέγιστο το $f(0) = -3$, η f παρουσιάζει για x=1 ολικό ελάχιστο το $f(1) = -e - 1$.

x	0	1	$+\infty$
f'	$-$		$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

Δ4. $\ln^2(x^2+2) - \ln^2(x^4+2) + 2x^2 > 2\ln\left(\dfrac{x^2+2}{x^4+2}\right) + 2x^4 \Leftrightarrow$

$\ln^2(x^2+2) - \ln^2(x^4+2) + 2x^2 > 2\ln(x^2+2) - 2\ln(x^4+2) + 2x^4 \Leftrightarrow$

$$\ln^2(x^2+2)-2\ln(x^2+2)+2x^2>\ln^2(x^4+2)-2\ln(x^4+2)+2x^4 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\ln^2(x^2+2)}{2}-\ln(x^2+2)+x^2>\frac{\ln^2(x^4+2)}{2}-\ln(x^4+2)+x^4 \Leftrightarrow$$

$$f(x^2+2)>f(x^4+2)\underset{x^4+2>1}{\overset{x^2+2>1}{\Leftrightarrow}}x^2+2>x^4+2\Leftrightarrow x^2(1-x^2)>0\Leftrightarrow x\in(-1,0)\cup(0,1)$$

Δ5. $\int_0^e f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^e f(x)dx$

• $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(-e^x+x-2)dx=\left[-e^x+\frac{x^2}{2}-2x\right]_0^1=$

$\left(-e^{-1}+\frac{1}{2}-2\right)-(-1)=-e^{-1}-\frac{1}{2}$

• $\int_1^e f(x)dx=\int_1^e\left(\frac{\ln^2 x}{2}+x-\ln x-e-2\right)dx=$

$\int_1^e\left(\frac{\ln^2 x}{2}\right)dx-\int_1^e \ln x dx+\int_1^e(x-e-2)dx$

• $\int_1^e\left(\frac{\ln^2 x}{2}\right)dx-\int_1^e \ln x dx=\int_1^e\left(x'\frac{\ln^2 x}{2}\right)dx-\int_1^e \ln x dx=$

$\left[x\frac{\ln^2 x}{2}\right]_1^e-\int_1^e\left(x2\ln x\frac{1}{x}\right)dx-\int_1^e \ln x dx=\frac{e}{2}-3\int_1^e \ln x dx=$

$\frac{e}{2}-3\int_1^e x'\ln x dx=\frac{e}{2}-3\left([x\ln x]_1^e-\int_1^e 1dx\right)=\frac{e}{2}-3\left(e-[x]_1^e\right)=\frac{e}{2}-3$

• $\int_1^e(x-e-2)dx=\left[\frac{x^2}{2}-ex-2x\right]_1^e=\left(\frac{e^2}{2}-e^2-2e\right)-\left(\frac{1^2}{2}-e-2\right)=\frac{3}{2}-\frac{e^2}{2}-e$

Συνεπώς $\int_0^e f(x)dx=-e^{-1}-\frac{1}{2}+\frac{e}{2}-3+\frac{3}{2}-\frac{e^2}{2}-e=-\frac{e^2+e+2e^{-1}+4}{2}$

Ι. Ανδρουλιδάκης, Μ. Βυνιχάκης, Α. Δουλγεράκης, Μ. Μπαρμπούνη, Ζ. Μπομπότη, Π. Σιδερής, Α. Τσιλιφώνης.

Διεύθυνση Σπουδών:

Δημόπουλος Νικόλαος
Νιώτη Χριστίνα
Τζαβάρα Δήμητρα